

Title	代數方程式ノ根ノ絶對値ニツイテ
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 63 p.34-p.38
Issue Date	1935-10-25
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74166
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

244. 代数方程式ノ根ノ絶對値ニツイテ

角 谷 靜 夫 (阪大)

高橋氏ハ n 次ノ代数方程式

$$(p_0 + iq_0)x^n + (p_1 + iq_1)x^{n-1} + \dots + (p_n + iq_n) = 0 \quad (1)$$

(p, q ハ實數トス) ノ根ノ絶對値ハ

$$\left. \begin{array}{l} p_0 \geq p_1 \geq \dots \geq p_n \geq 0 \\ q_0 \geq q_1 \geq \dots \geq q_n \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

ナルトキ $\sqrt{2}$ ヲ超ヘナイコトヲ証明サレタ。

コレニ関シテ次ノ定理が成立スル。

定理 條件 (2) ヲ満足スル n 次ノ代数方程式 (1) ノ根ノ絶對値ノ上限 ρ_n ハ

$$\Re \left(\frac{x^{n+1} - x^k}{x^{n+1} - x^l} \right) = 0 \quad 0 \leq k, l \leq n \quad (3)$$

ヲ満足スル x ノ絶對値ノ上限ニ等シイ。

$\frac{1}{x} = \xi$ トオケバコレハ又

$$\Re \left(\frac{1 - \xi^{k'}}{1 - \xi^{l'}} \right) = 0 \quad 1 \leq k', l' \leq n+1 \quad (4)$$

ヲ満足スル ξ ノ絶對値ノ下限ノ逆數ニ等シイ。

証明: (1) ハ $x=1$ ナル根ヲ持タナイカラ (1) ノ両辺ニ $(x-1)$ ヲ乗ジ

$$\left. \begin{aligned} a_m &= p_m - p_{m+1} \\ b_m &= q_m - q_{m+1} \end{aligned} \right\} \quad m=0, 1, \dots, n-1$$

$$a_n = p_n, \quad b_n = q_n$$

トオケバ

$$a_m \geq 0, \quad b_m \geq 0 \quad m=0, 1, \dots, n \quad \text{----- (5)}$$

$$(a_n + ib_n)(x^{n+1} - 1) + (a_{n-1} + ib_{n-1})(x^{n+1} - x) + \dots$$

$$\dots + (a_0 + ib_0)(x^{n+1} - x^n) = 0 \quad \text{----- (6)}$$

トナラ。

$$0 \leq \text{Arg}(a_m + ib_m) \leq \frac{\pi}{2}$$

デアルカラ (6) が成立スルタメニハ少クトモアル一組ノ

$k, l (0 \leq k, l \leq n)$ ニ對シテ

$$\frac{3\pi}{2} \geq \text{Arg}\left(\frac{x^{n+1} - x^k}{x^{n+1} - x^l}\right) \geq \frac{\pi}{2} \quad \text{----- (7)}$$

即チ $\Re\left(\frac{x^{n+1} - x^k}{x^{n+1} - x^l}\right) \leq 0 \quad \text{----- (8)}$

デナケレバナラナイ。

何者、若シサテデナケレバアル $\theta = \theta_0$ ニ對シテ

$$\theta_0 \leq \text{Arg}(x^{n+1} - x^{n-m}) \leq \theta_0 + \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \delta > 0$$

$$m = 0, 1, \dots, n$$

トナラ。コレヨリ

$$\theta_0 \leq \text{Arg}\{(a_m + ib_m)(x^{n+1} - x^{n-m})\} \leq \theta_0 + \pi - \delta, \quad \delta > 0$$

$$m = 0, 1, \dots, n$$

トナリ Vector ノ性質ヨリ (6) が成立シナイコトガワカル。

逆 = シクトモー組ノ k, l ($0 \leq k, l \leq n$) = 對シテ (8),
 シタガツテ (7) が成立スレバ (必要アレバ k, l ヲ入レカヘ
 レコト = ヨリ

$$\pi \geq \text{Arg} \left(\frac{x^{n+1} - x^k}{x^{n+1} - x^l} \right) \geq \frac{\pi}{2}$$

トナルカラ

$$a_l + i b_l = 1 \quad (\text{即チ } a_l = 1, b_l = 0)$$

$$a_k + i b_k = - \frac{x^{n+1} - x^l}{x^{n+1} - x^k}$$

$$a_m + i b_m = 0 \quad (m \neq l, m \neq k)$$

トオケバ (5), (6) ハ明カニ満足サレテキル。從ツテ

$$p_m = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

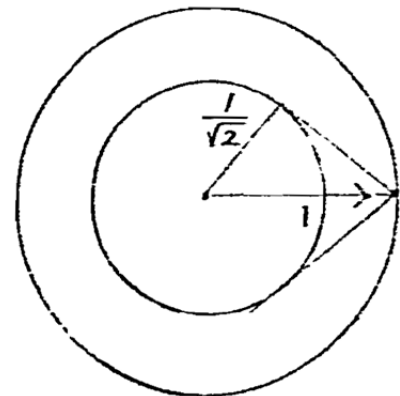
$$q_m = b_m + b_{m+1} + \dots + b_n$$

トオケバ (1), (2) が満足サレル。

(8)ヲ満足スル x ノ絶對値ノ上限ハ (8)ノ不等号ヲ除イテ
 (3)ノ形ニシテモ同ジデアアルカラ定理ハ証明セラレタ。

注意: 條件 (4) ハ $(n+1)$ 個ノ点
 ξ^m ($m=1, 2, \dots, n+1$) が頂点
 ヲ 1 = モツ直角ヨリ小サイ角ノ内部
 = ハイヲタイコトラ表ハス。

因 $|\xi| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ハ 1 ヲ頂点 = モツ直角
 内 = アルカラ高橋氏ノ定理ハコノ考
 ヘヨリモ直ニ得ラレル。



次 = (4) = ヨツテ ρ_2 ヲ求メテ見ヨシ。

$k' > l'$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ。 $\xi = re^{i\theta}$ トオク。

$$1^\circ (k'=2, l'=1) \quad \Re\left(\frac{1-\xi^2}{1-\xi}\right) = \Re(1+\xi) \quad \text{コレハ } |\xi| < 1 \\ \text{ニテ } 0 \text{ トナラナイ。}$$

$$2^\circ (k'=3, l'=1) \quad \Re\left(\frac{1-\xi^3}{1-\xi}\right) = \Re(1+\xi+\xi^2) = 1+r\cos\theta \\ + r^2\cos 2\theta = \left(\sqrt{2}r\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{7}{8} - r^2\right) \\ \text{コレハ } r = \sqrt{\frac{7}{8}}, \cos\theta = -\frac{1}{4r} \text{ ナルトキ} = 0 \text{ トナリソレ} \\ \text{ヨリ小ナイ } r = \text{對シテ } 0 \text{ トナラナイ。}$$

$$3^\circ (k'=3, l'=2) \quad \Re\left(\frac{1-\xi^3}{1-\xi^2}\right) = \Re\left(\xi + \frac{1}{1+\xi}\right) \\ = \frac{1+2r\cos\theta+2r^2\cos^2\theta+r^3\cos\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}$$

コノ場合ハ

$$F(r, \alpha) \equiv 1+2r\alpha+2r^2\alpha^2+r^3\alpha=0 \quad |\alpha| \leq 1$$

ヲ満足スル正根 r ノ下限ヲ求ムレバヨイ。

$$F(r, \alpha) = \left(\sqrt{2}r\alpha + \frac{2+r^2}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{4-4r^2-r^4}{8}$$

デアルカラ

$$0 < r < 2-\sqrt{2} \text{ ナルトキハ}$$

$$\min_{|\alpha| \leq 1} F(r, \alpha) = F(r, -1) = (1-r)(1-r+r^2) > 0$$

$$2-\sqrt{2} \leq r \leq 1 \text{ ナルトキハ}$$

$$\min_{|\alpha| \leq 1} F(r, \alpha) = F\left(r, -\frac{2+r^2}{4r}\right) = \frac{4-4r^2-r^4}{8}$$

コレヲ ≤ 0 ナラシメル最小ノ r ハ

$$r = \sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

デアル。

$$\sqrt{\frac{7}{8}} > \sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

デアレカラ

$$\beta_2 - \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-2}} = 1.1 \text{ 弱}$$

トナル。

實際

$$(1+i\sqrt{4\sqrt{2}-5})x^2 + (1+i\sqrt{4\sqrt{2}-5})x + 1 = 0$$

ハ
$$x = -\frac{1+i\sqrt{4\sqrt{2}-5}}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} \left(|x| = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-2}} \right) \text{ 7 根 = 持ツ。}$$